

1. (a) Se considera la sucesión $a_1 = 4, a_n = a_{n-1} + 6$. Probar que

$$a_1 + \dots + a_n = n(3n + 1) \quad (2 \text{ puntos})$$

Solución:

- Para el lector que desconozca las fórmulas de las progresiones aritméticas, puede probar por inducción que $a_n = 4 + (n - 1)6$. Al efecto, el caso $n = 1$ es obvio. Si $n > 1$,

$$a_n = a_{n-1} + 6 = 4 + (n - 2)6 + 6 = 4 + (n - 1)6$$

Ahora

- Obtenemos la suma, $3n^2 + n$, por inducción, siendo obvio el caso $n = 1$. Para $n > 1$,

$$\begin{aligned} a_1 + \dots + a_n &= (a_1 + \dots + a_{n-1}) + a_n = 3(n-1)^2 + (n-1) + 4 + 6(n-1) = \\ &= \dots = 3n^2 + n \quad \text{FIN} \end{aligned}$$

- O puede *improvisar* la demostración de la suma de una progresión aritmética:

$$S = 4 + 10 + \dots + (4 + 6(n - 2)) + (4 + 6(n - 1))$$

Luego

$$S = (4 + 6(n - 1)) + (4 + 6(n - 2)) \dots + 10 + 4$$

Sumando,

$$2S = [4 + (4 + 6(n - 1))] + \dots + [4 + (4 + 6(n - 1))]$$

Finalmente, $2S = [4 + (4 + 6(n - 1))]n$ y

$$S = \frac{4 + (4 + 6(n - 1))}{2}n = (4 + 3n - 3)n = n(3n + 1) \quad \text{FIN}$$

- Se trata de la progresión aritmética

$$4, 10, \dots, (4 + 6(n - 2)), (4 + 6(n - 1))$$

cuya suma es

$$\frac{4 + (4 + 6(n - 1))}{2}n = (4 + 3n - 3)n = n(3n + 1) \quad \text{FIN}$$

- (b) Sean $\mathbf{R}$ el conjunto de los números reales y

$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 < x \leq 3\}$$

ambos ordenados por la relación $\leq$. Describe, si existen, máximos y mínimos de B respecto de $\mathbf{R}$ (2 puntos).

Solución: El máximo es 3, pero mínimo no hay, ya que el ínfimo $2 \notin B$.

2. (a) Dados dos enteros (u, m) con $\text{mcd}(u, m) = 1$ describe, en el lenguaje que estimes oportuno, un procedimiento para encontrar el inverso de u módulo m (3 puntos)

Solución: En la página 41 del texto encuentras uno.

- (b) Describe otro procedimiento para resolver un sistema de dos congruencias en $\mathbf{Z}$. Aplícalo al sistema

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{4} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \end{cases} \quad (4 \text{ puntos})$$

Solución:

En la página 46 del texto encuentras uno. Puedes completarlo con la solución general:

$$\{s + tm_0m_1 \mid t \in \mathbf{Z}\}$$

Aplicándolo al sistema propuesto, calculamos en primer lugar el inverso de 4 módulo 5, que es el propio 4 ($4 \cdot 4 = 16 \equiv 1 \pmod{5}$).

A continuación debemos calcular el resto de la división de $(1 - 2)4$ entre 5 que es 1. Por tanto, una solución es 6. El conjunto de soluciones será

$$\{6 + 20t \mid t \in \mathbf{Z}\}$$

3. (a) Describe un procedimiento para calcular el núcleo de una matriz. Aplícalo a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad (5 \text{ puntos})$$

Solución: En la p.86 del libro de texto tienes uno. Aplicándolo a la matriz dada se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Y el núcleo es el subespacio generado por el vector $(-2 \ 1)$.

- (b) Construye una matriz ortogonal cuya primera fila sea $(3/5, 4/5)$ (4 puntos).

Solución:

- A simple vista

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

- Si se desea aplicar los conocimientos del curso, basta aplicar el procedimiento de Gram-Schmidt al vector $v = (3 \ 4)$. Al efecto, elegimos $w = (1 \ 0)$ y calculamos t para que $u = w + tv$ sea ortogonal a v . Operando

$$(1 + 3t, 4) \perp (3 \ 4) \implies 3 + 9t + 16 = 0 \implies t = -19/9$$

Obtenemos $u = (1 - 19/9, 4) = (-10/9, 4)$. Normalizando u , se tiene el vector $(-4/5, 3/5)$ y la matriz será, como antes,

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

4. En el espacio afín euclídeo $\mathbf{R}^3$:

- Calcula las ecuaciones implícitas de la variedad afín V , de menor dimensión, que pasa por los puntos $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 1, 0)$ y $R = (0, 0, 1)$. Indica cuál es su dirección T . (2 puntos).
- Indica las ecuaciones implícitas de la recta D que pasa por el punto $(0, 0, 0)$ y cuya dirección es el subespacio generado por el vector $v = (1, 1, 1)$. (1 punto).
- Obtén la ecuación de la proyección π con base D y dirección T (5 puntos).
- ¿Es π una proyección ortogonal? ¿Por qué? (1 punto).
- Indica un plano cuya imagen por π sea un único punto (1 punto).

Solución:

- La dirección T de la variedad afín debe contener los vectores

$$\overrightarrow{PQ} = (-1, 1, 0), \quad \overrightarrow{PR} = (-1, 0, 1)$$

que por minimalidad es

$$T = \mathbf{R} \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$$

Por tanto, la variedad es $P + T$ de ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \sim \dots \sim x + y + z = 1$$

- Se obtienen, por ejemplo, de

$$\text{rang} \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \sim \begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases}$$

- (c) El origen pertenece a la base por lo que es doble; así la ecuación es $Y = AX$ donde A es la m.c. de la aplicación lineal f asociada.

Ahora, $f(e_1) = \overrightarrow{\pi(P)\pi(O)}$ y $\pi(P) = D \cap (P + T)$. Se trata de calcular la solución del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = y \\ x = z \end{cases}$$

que es $(1/3, 1/3, 1/3)$.

Análogamente, $f(e_2) = \overrightarrow{\pi(Q)\pi(O)}$ y $\pi(Q) = D \cap (Q + T)$. Se trata de los mismos cálculos toda vez que $P + T = Q + T$. Así, $f(e_2) = (1/3, 1/3, 1/3)$. Por la misma razón, $f(e_3) = (1/3, 1/3, 1/3)$ y

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (d) Sí, toda vez que la dirección de D y T son ortogonales.

- (e) El propio $P + T$.

Elige uno de los dos problemas siguientes

5. En cierta población, la media de hijos por familia en el año 2001 fue de 2 hijos; en el año 2002, fue de 3 hijos; en el año 2003, de 2 hijos, y en el 2004 y 2005 de 1 hijo. Predecir, razonadamente, la media de hijos por familia en el año 2008 (10 puntos).

Indicación: Interpola los puntos $(1, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 1)$

Solución:

Se desea calcular el polinomio f interpolador de grado menor o igual que 4, que pasa por los puntos

$(1, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 1)$ que formulamos como

$$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 2, f(4) = 1, f(5) = 1$$

Al efecto, resolvemos el sistema de congruencias

$$\begin{cases} f \equiv 2 & \text{mod } x - 1 \\ f \equiv 3 & \text{mod } x - 2 \\ f \equiv 2 & \text{mod } x - 3 \\ f \equiv 1 & \text{mod } x - 4 \\ f \equiv 1 & \text{mod } x - 5 \end{cases}$$

Siguiendo nuestro procedimiento¹ los cálculos serán

¹el lector puede seguir el que estime oportuno, a sabiendas de que el resultado es único

k	a_k	b_k	G	u	h	f
0	1	2	1			2
1	2	3	$x - 1$	1	1	$1 + x$
2	3	2	$x^2 - 3x + 2$	1/2	-1	$-x^2 + 4x - 1$
3	4	1	$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	1/6	1/3	$1/3 x^3 - 3x^2 + 23/3 x - 3$
4	5	1	$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$	1/24	-1/24	$-1/24 x^4 + 3/4 x^3 - 107/24 x^2 + 39/4 x - 4$

obteniendo el polinomio $f = -1/24 x^4 + 3/4 x^3 - 107/24 x^2 + 39/4 x - 4$.

Ahora, $f(8) = 2$, es la media de hijos por familia que se prevé para el 2008.

6. Dos curiosos vasos comunicantes V y W poseen una llave que, al ser abierta, produce un flujo de sus contenidos en las siguientes proporciones: el 25% del contenido de V pasa a W y el 50% del de W pasa a V . Se pide:

- Designando por V_n y W_n las cantidades respectivas de fluido en los vasos tras cerrar la llave n veces, establecer un sistema de ecuaciones que relacione los datos V_n, W_n con V_0, W_0 (3 puntos) .
- Suponiendo que $V_0 = 150$ litros y $W_0 = 60$ litros, calcular los contenidos respectivos tras 60 aperturas y cierres de la llave (5 puntos). (5 puntos).
- ¿Se vaciará el vaso W si se abre la llave demasiadas veces? Razona tu contestación (2 puntos).

Solución:

- Las ecuaciones, ya en forma matricial, que regulan el flujo de contenidos tras el cierre de la llave la n -ésima vez, son:

$$\begin{pmatrix} V_n \\ W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{n-1} \\ W_{n-1} \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} V_n \\ W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} V_0 \\ W_0 \end{pmatrix}$$

- Luego,

$$\begin{pmatrix} V_{60} \\ W_{60} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}^{60} \begin{pmatrix} 150 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Para calcular $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}^{60}$, llamamos A a la matriz y observamos que

$$\det(xI - A) = x^2 - 5/4 x + 1/4 = (x - 1)(x - 1/4)$$

Ahora

$$V(1) = \mathcal{N}(I - A) = \langle (2, 1) \rangle \quad V(1/4) = \mathcal{N}(1/4 I - A) = \langle (-1, 1) \rangle$$

Luego,

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies P^{-1}AP = \text{diag}[1, 1/4]$$

Por tanto,

$$A^{60} = P \text{diag}[1, 1/4^{60}] P^{-1} \sim P \text{diag}[1, 0] P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$\begin{pmatrix} V_{60} \\ W_{60} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 70 \end{pmatrix}$$

- Por último, por mucho que abramos la llave, tras la m -ésima vez,

$$A^m = P \text{diag}[1, 1/4^m] P^{-1}$$

Si m es grande, como antes, la matriz diagonal es la $\text{diag}[1, 0]$ y se tiene

$$A^m \sim P \text{diag}[1, 0] P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} V_m \\ W_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Los contenidos quedan estables y el vaso W no se vacía, sino que gana contenido.